

# INTEGRALES CURVILIGNES



Classification Thèmes de MegaMaths

Docs de Dany-Jack MERCIER

9

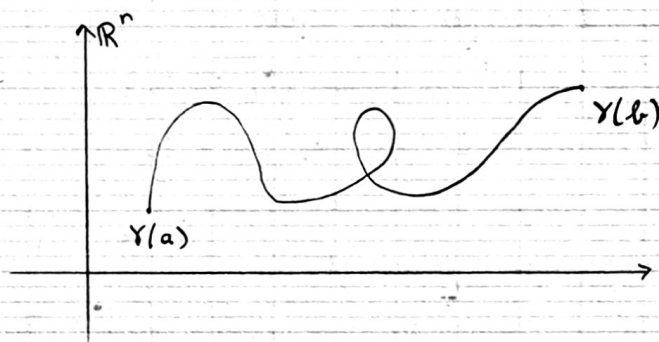
# Les intégrales curvilignes

Arc paramétré, arc géométrique

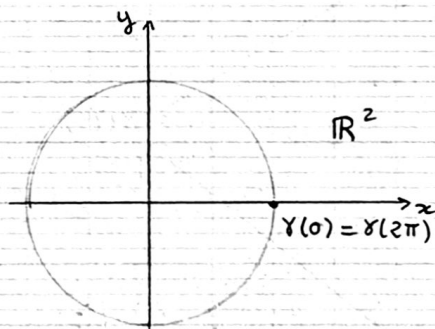
Arc paramétré :

$$t \in [a, b] \subset \mathbb{R} \longrightarrow \gamma(t) \in \mathbb{R}^n$$

$\gamma$  de classe  $C^1$



ex d'arc paramétré :  $t \in [0, 2\pi] \longrightarrow \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} = \gamma(t) \in \mathbb{R}^2$



Fonction  $C^1$  par morceaux : on peut faire une partition de l'intervalle  $[a, b]$  de définition où  $\gamma$  est  $C^1$  sur chacun des sous-intervalles.

$$\left[ \begin{array}{c|c|c|c|c} a=t_1 & t_2 & t_3 & t_4 & b=t_5 \end{array} \right]$$

Dans l'exemple ci-dessus :

$$s \in [0, \pi] \xrightarrow{\beta} \begin{pmatrix} \cos 2s \\ \sin 2s \end{pmatrix}$$

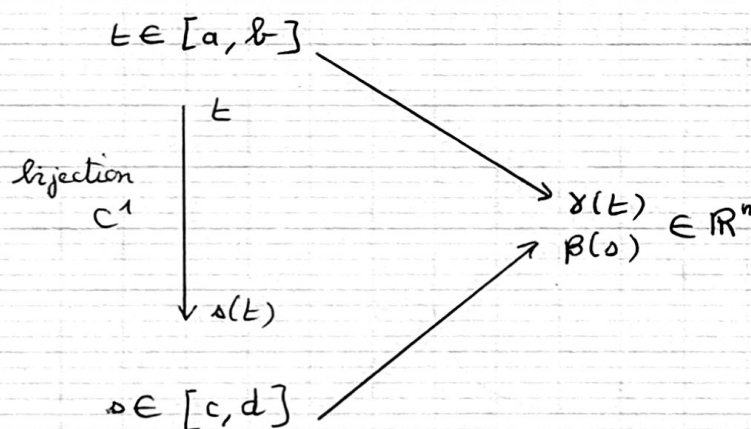
Def Deux arcs paramétrés  $t \in [a, b] \rightarrow \gamma(t) \in \mathbb{R}^n$   
 $s \in [c, d] \rightarrow \beta(s) \in \mathbb{R}^n$   
 de classe  $C^1$  sont équivalents ( $\sim$ ) s'il existe une bijection  
 de classe  $C^1$   $[a, b] \rightarrow [c, d]$   
 $t \mapsto s(t)$   
 tel que  

$$\gamma(t) = \beta \circ s(t) \quad \text{sur } [a, b]$$

Dans l'exemple du cercle :

$$\begin{aligned}
 [0, 2\pi] &\longrightarrow [0, \pi] \\
 t &\longmapsto s = \frac{t}{2}
 \end{aligned}$$

Diagramme commutatif :



Remarque :  $\gamma(t(s)) = \beta(s)$ .

Même image dans  $\mathbb{R}^n$ .

Par définition on appellera arc géométrique de classe  $C^1$  une classe d'équivalence de cette relation  $\sim$  (entre les arcs paramétrés).

Remarquons que nous aurons  $s'(t) > 0 \quad \forall t$  ou  $s'(t) < 0 \quad \forall t$ .

On est conduit à définir la relation :

$\sim$  avec m orientation.

Def

$s = C^1$ -difféomorphisme

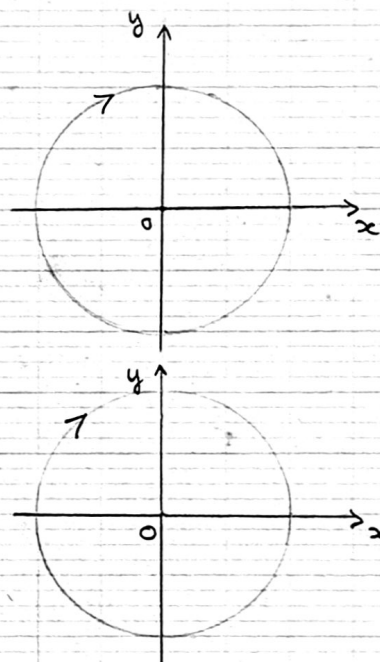
$\gamma$  et  $\beta$  sont " $\sim$  avec même orientation" s'il existe  $s : t \in [a, b] \mapsto s(t) \in [c, d]$  de classe  $C^1$  ainsi que son inverse et strictement croissante, c.à.d.  $s'(t) > 0 \quad \forall t \in [c, d]$ .  
Les classes d'équivalence sont appelées "arcs géométriques orientés".

ex :

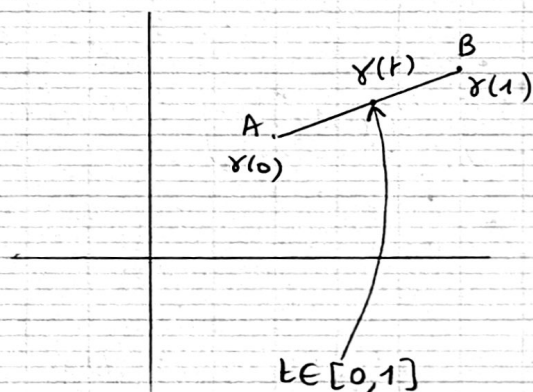
$$u \in [0, 2\pi] \xrightarrow{\delta} \delta(u) = \begin{pmatrix} \cos u \\ -\sin u \end{pmatrix}$$

$\downarrow s$

$$s(u) = t = -u \xrightarrow{\gamma} \gamma(t) = \delta(-t) = \begin{pmatrix} \cos(-t) \\ -\sin(-t) \end{pmatrix}$$



ex :



$$\begin{aligned} \gamma(t) &= (1-t)A + tB \\ &= t(B-A) + A \end{aligned}$$

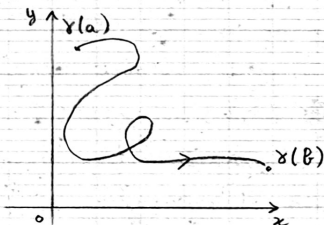


# Intégrale curviligne

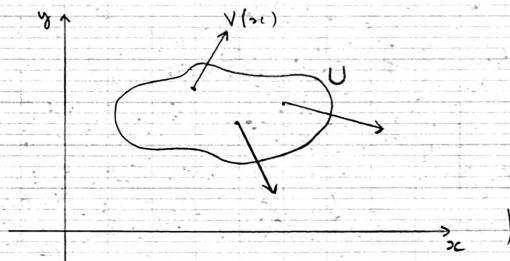
## 1° Définitions

Soit  $\Gamma$  un arc géométrique orienté

$$\gamma: t \in [a, b] \rightarrow \gamma(t) \in \mathbb{R}^n$$



$V(x)$  un champ de vecteur de classe  $C^0$  au voisinage de  $\text{Im } \gamma$   
 (Un champ de vecteur de classe  $C^p$  sur un ouvert  $U \subset \mathbb{R}^n$  est l'application  $V: x \in U \rightarrow V(x) \in \mathbb{R}^n$  où  $V$  est de classe  $C^p$ )



Def | On posera :

$$\int_{\Gamma} \vec{V}(x) \cdot d\vec{x} = \int_a^b \vec{V}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt$$

Nous aurons donc :

$$\int_{\Gamma} \vec{V}(x) \cdot d\vec{x} = \int_a^b [V_1(\gamma(t)) \cdot x_1'(t) + \dots + V_n(\gamma(t)) \cdot x_n'(t)] dt$$

Soit  $\beta \sim \gamma$  avec même orientation

$$\text{Il existe } s: t \in [a, b] \rightarrow s = s(t) \in [c, d]$$

$$s'(t) > 0$$

tel que  $\beta(\alpha(t)) = \gamma(t)$

Alors

$$\int_c^d \vec{V}(\beta(s)) \vec{\beta}'(s) ds = \int_a^b \underbrace{\vec{V}(\beta(\alpha(t)))}_{\gamma(t)} \underbrace{\beta'(\alpha(t)) \alpha'(t)}_{\gamma'(t)} dt$$

$\xrightarrow{\alpha \text{ croissante}}$

où  $s = \alpha(t)$

$$\text{Or } \beta \circ \alpha(t) = \gamma(t) \Rightarrow \beta'(\alpha(t)) \cdot \alpha'(t) = \gamma'(t)$$

(dérivation des fonctions composées)

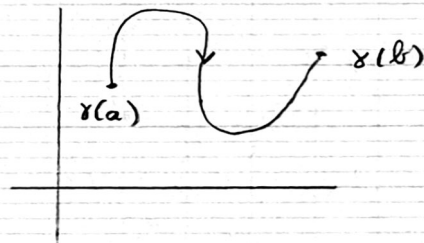
L'intégrale curviligne ne ~~peut~~<sup>dépend</sup> donc que de l'arc géométrique orienté.

Exemple :

$\Gamma$  = arc paramétré orienté

$$\gamma : t \in [a, b] \longrightarrow \gamma(t) \in \mathbb{R}^n$$

$$\begin{cases} \alpha(t) = -t \\ \downarrow \end{cases}$$



$$(-\Gamma) : s \in [-b, -a] \longrightarrow \beta(s) = \gamma(-s) \in \mathbb{R}^n$$

A( $\Gamma$ ) on a associé "l'arc paramétré inverse" ( $-\Gamma$ )

Alors :

$$\int_{-\Gamma} \vec{V}(x) d\vec{x} = - \int_{\Gamma} \vec{V}(x) d\vec{x} \quad (\text{le vérifier!})$$

2° Propriétés de  $\int_{\Gamma} \vec{V} \cdot d\vec{x}$

$$V(x, y) = \begin{pmatrix} P(x, y) \\ Q(x, y) \end{pmatrix}$$

Notation :

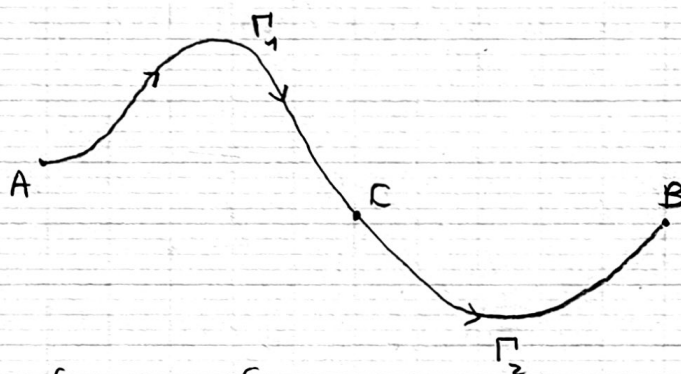
$$\int_{\Gamma} \vec{V}(x) d\vec{x} = \int_{\Gamma} P(x, y) dx + Q(x, y) dy$$

$$V = \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix}$$

$$\int_{\Gamma} A dx + B dy + C dz = \int_a^b [A(M(t))x'(t) + B(M(t))y'(t) + C(M(t))z'(t)] dt$$

$$* \int_{\Gamma} (V+W) dx = \int_{\Gamma} V dx + \int_{\Gamma} W dx$$

\*



$$\int_{\Gamma} V dx = \int_{\Gamma_1} V dx + \int_{\Gamma_2} V dx$$

$$\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$$

$$\Gamma : [a, b] \xrightarrow{\gamma} \gamma(t)$$

$$\Gamma_1 : [a, c] \xrightarrow{\gamma} \gamma(t)$$

$$\Gamma_2 : [c, b] \xrightarrow{\gamma} \gamma(t)$$

$$\int_a^b \int_c^c$$

oui.

\*



Def | Un champ de vecteurs  $\vec{V}(x)$  dérive d'un potentiel  $f(x)$  sur l'ouvert  $U \subset \mathbb{R}^n$  si

$$\vec{V} = \vec{\nabla} f$$

$$f \in C^1(U) \quad \vec{\nabla} f = \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) \right)$$

Propriété :

$$\int_{\gamma} \vec{\nabla} f dx = f(B) - f(A)$$



En effet

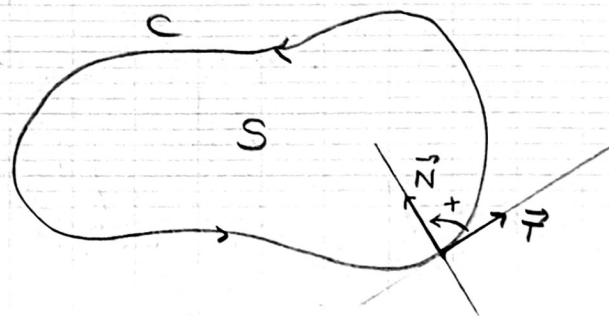
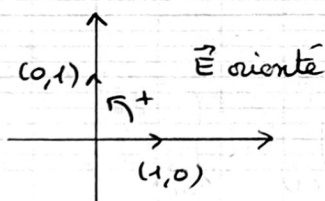
$$\int_{\gamma} \vec{\nabla} f(x) \cdot d\vec{x} = \int_a^b \left[ \frac{\partial f}{\partial x_1}(x(t)) \cdot x_1'(t) + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(x(t)) \cdot x_n'(t) \right] dt$$

$$[a, b] \xrightarrow{\gamma} x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}$$

$$= \int_a^b \frac{d}{dt} (f(x(t))) dt = f(x(b)) - f(x(a)) = f(B) - f(A)$$

Formule de Green dans le plan

$$\oint_C P dx + Q dy = \iint_S \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy$$



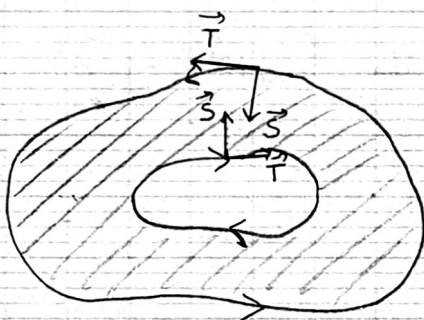


$V(x, y) = \begin{pmatrix} P(x, y) \\ Q(x, y) \end{pmatrix}$  de classe  $C^1$  dans un voisinage ouvert de  $S$

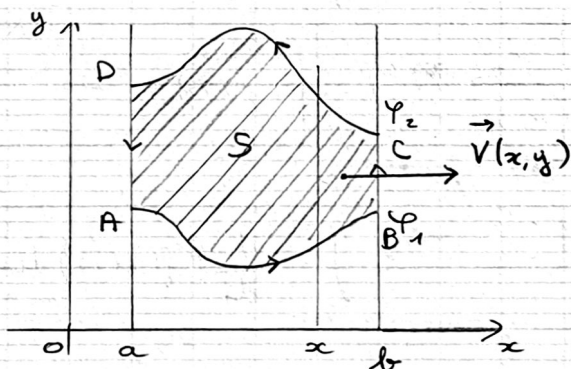
$\vec{T}$  = tangente

$\vec{N}$  = vecteur normal intérieur.

$\vec{T}$  sera choisi tel que  $(\vec{T}, \vec{N})$  soit directe.  
L'orientation de  $\vec{E}$  donnée par:



a) Cas des régions de type I



$$S = \begin{cases} \phi_1(x) \leq y \leq \phi_2(x) \\ a \leq x \leq b \end{cases}$$

$\phi_1$  et  $\phi_2$  de classe  $C^1$  sur  $]a, b[$   
 $C^0$  sur  $[a, b]$

On suppose  $V(x, y) = \begin{pmatrix} P(x, y) \\ 0 \end{pmatrix}$

Calculons :

$$\int_C P dx = \int_{\vec{AB}} + \int_{\vec{BC}} + \int_{\vec{CD}} + \int_{\vec{DA}}$$

$\underbrace{\vec{BC}}_{=0} \quad \underbrace{\vec{DA}}_{=0}$



$$\vec{AB} : x \in [a, b] \mapsto \begin{pmatrix} x \\ \varphi_1(x) \end{pmatrix}$$

$$\vec{CD} : x \in [b, a] \mapsto \begin{pmatrix} x \\ \varphi_2(x) \end{pmatrix}$$

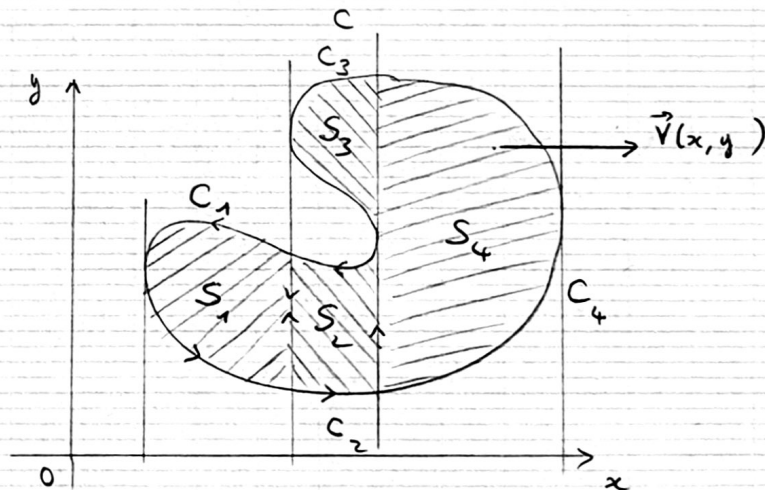
$$\begin{aligned} \int_c P dx &= \int_a^b P(x, \varphi_1(x)) dx + \int_b^a P(x, \varphi_2(x)) dx \\ &= \int_a^b [P(x, \varphi_1(x)) - P(x, \varphi_2(x))] dx \end{aligned}$$

D'autre part :

$$-\iint_S \frac{\partial P}{\partial y}(x, y) dx dy = - \int_a^b \left( \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \frac{\partial P}{\partial y}(x, y) dy \right) dx$$

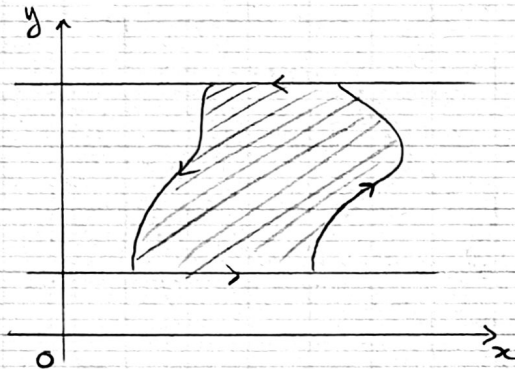
$\underbrace{\hspace{10em}}_{P(x, \varphi_2(x)) - P(x, \varphi_1(x))}$

b) La région  $S$  se découpe en un nombre fini de régions de type I et  $V = \begin{pmatrix} P \\ 0 \end{pmatrix}$



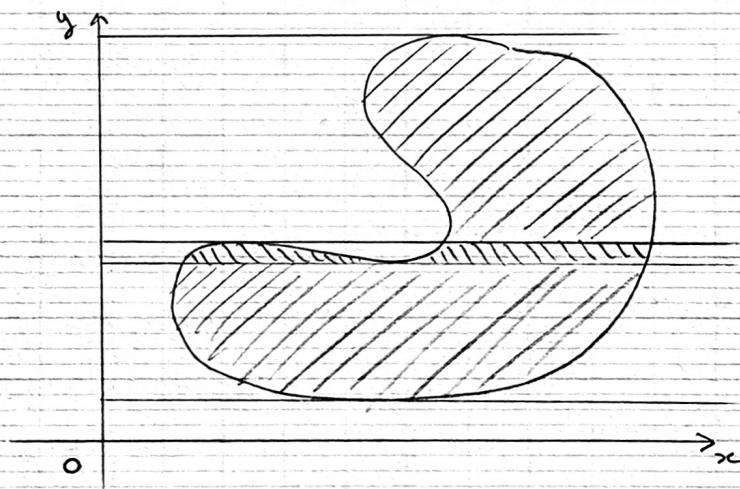
$$\iint_S -\frac{\partial P}{\partial y} dx dy = \iint_{S_1} + \iint_{S_2} + \iint_{S_3} + \iint_{S_4} = \int_c P dx$$

c) Cas des régions de type II et  $V = \begin{pmatrix} 0 \\ Q \end{pmatrix}$



$$\begin{cases} \Psi_1(y) \leq x \leq \Psi_2(y) \\ c \leq y \leq d \end{cases}$$

d) La région  $S$  se découpe en un nbre fini de régions du type II et  $V = \begin{pmatrix} 0 \\ Q \end{pmatrix}$



Def

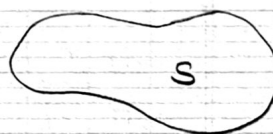
$S$  est dite admissible si l'on peut la décomposer en un nombre fini de régions de type I ainsi qu'en régions du type II.

Th  $\left| \oint_C P dx + Q dy = \iint_S \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy \right.$   
 où  $S$  est une région admissible.

Application 1: Soit  $V$  le champ de vecteurs tel que  $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$  sur  $S$ .  
 alors  $\int_C \vec{V} \cdot d\vec{x}$

Application 2: Calcul d'aire

$$\text{Aire}(S) = \iint_S dx dy$$

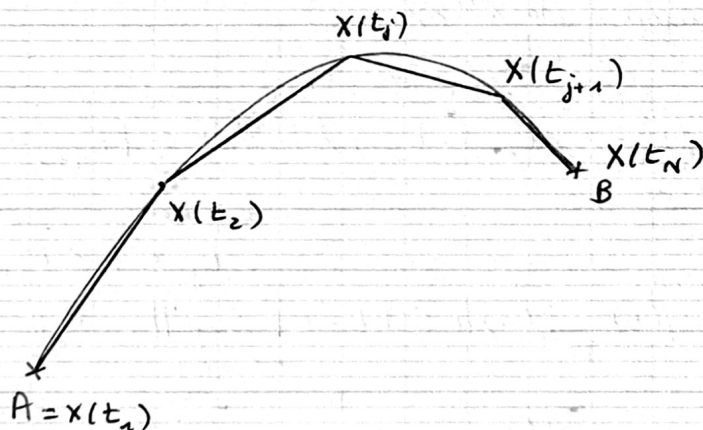


Si  $S$  est admissible alors  $= \iint_S x dy = - \int_C y dx$   
 Alors:

$$\int_C y dx$$

$$\boxed{\iint_S dx dy = \frac{1}{2} \int_C (x dy - y dx)}$$

Longueur d'un arc de courbe dans  $\mathbb{R}^n$



Soit un paramétrage  $C^1: t \in [\alpha, b] \rightarrow x(t) \in C$

pas de la subdivision de  $[a, b] = \sup_j (t_{j+1} - t_j) = \delta$

Le long de la ligne polygonale =  $\sum_{j=1}^{N-1} \|x(t_{j+1}) - x(t_j)\|$

Def

Si la longueur des lignes polygonales inscrites admet une limite quand le pas  $\delta \rightarrow 0$ , cette limite est appelée longueur de  $C$

Th

Soit  $C$  une courbe de classe  $C^1$ , alors la limite existe et

$$I = \text{longueur}(C) = \int_a^b \|x'(t)\| dt$$

En effet :

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta_0 \quad \delta \leq \delta_0 \Rightarrow \left| \sum_{j=1}^{N-1} \|x(t_{j+1}) - x(t_j)\| - I \right| \leq \varepsilon$$

$\varepsilon > 0$

$$1) \exists \delta_1 / \delta \leq \delta_1 \Rightarrow \left| I - \sum_{j=1}^{N-1} (t_{j+1} - t_j) \underbrace{\|x'(t_j)\|}_{f(t_j)} \right| \leq \varepsilon$$

(théorie de l'intégrale)

$$2) \exists \delta_2 / \|x'(t) - x'(a)\| \leq \frac{\varepsilon}{b-a} \quad \forall t, a \text{ dès que } |t-a| \leq \delta_2$$

(continuité uniforme de  $x'(t)$ )

3)

$$\|x(t_{j+1}) - x(t_j) - (t_{j+1} - t_j) x'(t_j)\| \leq (t_{j+1} - t_j) \sup_{t_j \leq a \leq t_{j+1}} \|x'(a) - x'(t_j)\|$$

$$\text{En effet : } \|f(t) - f(a)\| \leq |t-a| \sup_{a \leq u \leq t} \|f'(u)\|$$

$t_j \leq a \leq t_{j+1}$

$$f(a) = x(a) - a x'(t_j)$$

$$\|f(t_{j+1}) - f(t_j)\| \leq |t_{j+1} - t_j| \sup_{t_j \leq a \leq t_{j+1}} \|f'(a)\|$$



2) et 3)  $\Rightarrow$

$$\delta \leq \delta_2 \quad \|X(t_{j+1}) - X(t_j) - (t_{j+1} - t_j) X'(t_j)\| \leq (t_{j+1} - t_j) \frac{\varepsilon}{b-a}$$

Inégalité triangulaire:  $\Downarrow$

$$\left| \|X(t_{j+1}) - X(t_j)\| - (t_{j+1} - t_j) \|X'(t_j)\| \right| \leq (t_{j+1} - t_j) \frac{\varepsilon}{b-a}$$

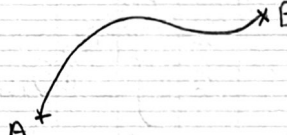
$$\left| \left( \sum_1^{N-1} \|X(t_{j+1}) - X(t_j)\| \right) - \left( \sum_1^{N-1} (t_{j+1} - t_j) \|X'(t_j)\| \right) \right| \leq \varepsilon$$

1)  $\Rightarrow \delta < \delta_1$  et  $\delta_2$

Alors

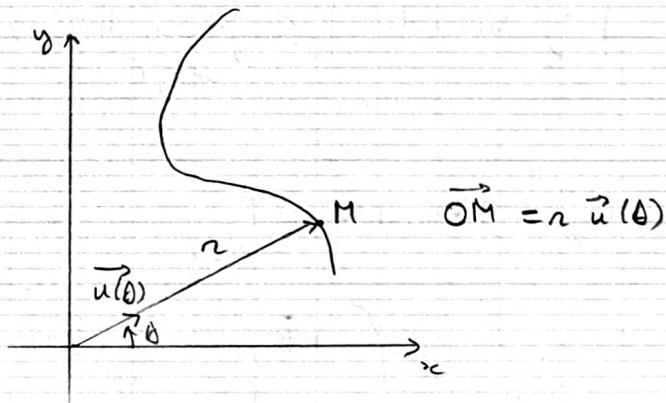
$$\left| I - \sum_1^{N-1} \|X(t_{j+1}) - X(t_j)\| \right| \leq 2\varepsilon$$

Exemple:



$$\text{longueur } \overline{AB} = \int_a^b \|X'(t)\| dt = \int_a^b \sqrt{[x_1'(t)]^2 + \dots + [x_n'(t)]^2} dt$$

$$\text{ou } ds = \sqrt{x_1'(t)^2 + \dots + x_n'(t)^2} dt = \int_a^b ds$$



$$t \in [a, b] \longrightarrow X(t) = r(t) \vec{u}(\theta(t))$$

$$\|X'(t)\| = \left\| r'(t) \vec{u}(\theta(t)) + r(t) \frac{d\vec{u}}{d\theta} \theta'(t) \right\|$$



$$X'(t) = r' \vec{u} + r \cdot \theta' \cdot \vec{v}$$

$\vec{v}$  directement orthogonal à  $\vec{u}$

IB

$$ds = \sqrt{r'^2 + r^2(\theta')^2} dt$$

Cas particuliers :  $\theta = r$  alors  $l = \int_{\theta=r_0}^{\theta=r_1} \sqrt{r_0'^2 + r_0^2} d\theta$

Majoration d'une intégrale curviligne

$$\int_C \vec{V}(x) \cdot \vec{dx} = \int_a^b \vec{V}(X(t)) \cdot \vec{X}'(t) dt$$

$$|\vec{V} \cdot \vec{W}| \leq \|\vec{V}\| \|\vec{W}\|$$

Donc

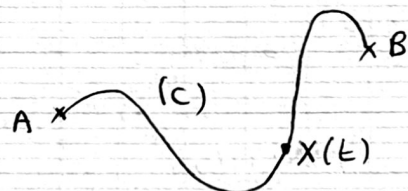
$$\begin{aligned} \left| \int_a^b \vec{V}(x) \cdot \vec{dx} \right| &\leq \int_a^b \|\vec{V}(x)\| \cdot \|\vec{X}'(t)\| dt \\ &\leq \int_a^b \|\vec{V}(x)\| ds \leq M \int_a^b \|\vec{X}'(t)\| dt \\ &= M \cdot \text{long}(C) \end{aligned}$$

$$\text{où } M = \sup_{x \in C} \|\vec{V}(x)\|$$

Ainsi :

$$\left| \int_C \vec{V}(x) \cdot \vec{dx} \right| \leq \sup_{x \in C} \|\vec{V}(x)\| \cdot \text{long}(C)$$

$$\text{Longueur d'un arc AB} = \int_a^b \|\vec{X}'(t)\| dt = l$$



$$t \in [a, b] \longrightarrow X(t) \in C$$

$$\text{On définit } o(t) = \text{long } AX(t) = \int_a^t \|\vec{X}'(\alpha)\| d\alpha$$

$$t \in [a, b] \rightarrow s(t) \in [0, l]$$

$$s'(t) = \|x'(t)\| > 0$$

$t \rightarrow s$  est bijective  $C^1$  entre  $[a, b]$  et  $[0, l]$

On peut paramétrer (C) par  $s$  :

$$s \in [0, l] \rightarrow \overbrace{x(t(s))}^{Y(s)} \in C$$

point tel que  $AX = s$

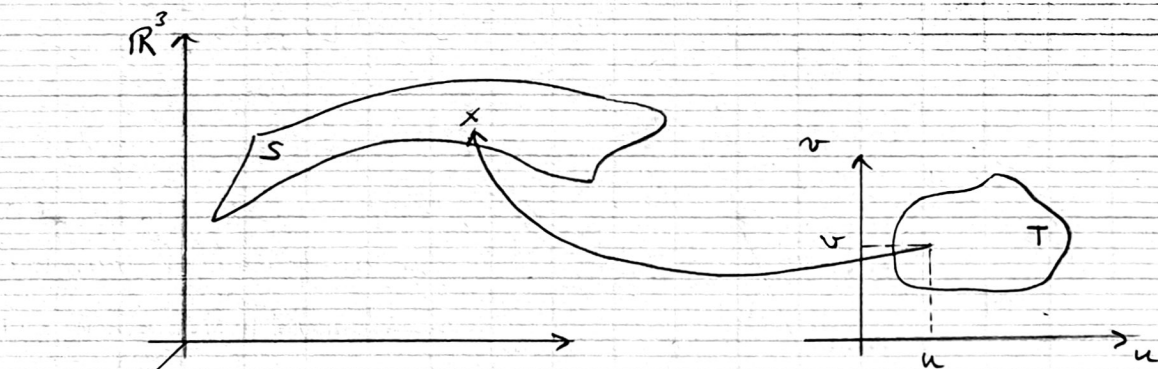
$$Y'(s) = X'(t(s)) \cdot t'(s)$$

$$= X'(t(s)) \cdot \frac{1}{s'(t)}$$

$$Y'(s) = \|X'(t)\| > 0 \quad Y'(s) = \frac{X'(t(s))}{\|X'(t(s))\|} \text{ est unitaire}$$

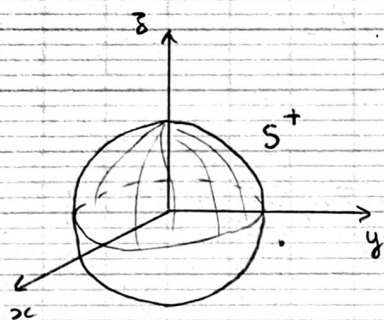
$$\text{long } \overline{AB} = \int_0^l \|Y'(s)\| ds = \int_0^l s ds = l$$

Intégrales de surface.



$$(u, v) \in T \subset \mathbb{R}^2 \xrightarrow{\text{ouvert}} X(u, v) = \begin{pmatrix} x(u, v) \\ y(u, v) \\ z(u, v) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

(Élément de surface paramétré)



$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ z > 0 \end{cases}$$

$$S^+ = S \cap \{z > 0\}$$

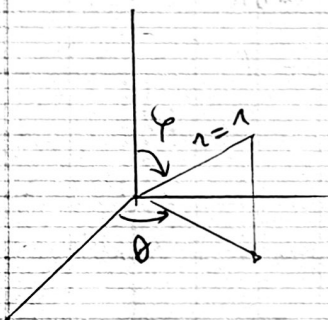
$$z^2 = 1 - x^2 - y^2$$

$$z = +\sqrt{1 - x^2 - y^2}$$

avec  $(x, y) \in$  disque unité ouvert  $(0, 1)$

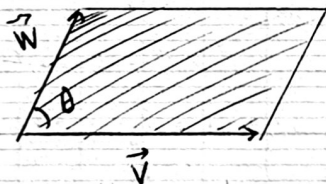
On a paramétrisé  $S^+$  par  $(x, y) \in T$

$$(x, y) \in T \longrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ \sqrt{1 - x^2 - y^2} \end{pmatrix}$$



$$\begin{cases} x = \cos \theta \sin \varphi \\ y = \sin \theta \sin \varphi \\ z = \cos \varphi \end{cases}$$

$$(\theta, \varphi) \in ]0, 2\pi[ \times ]0, \frac{\pi}{2}[$$

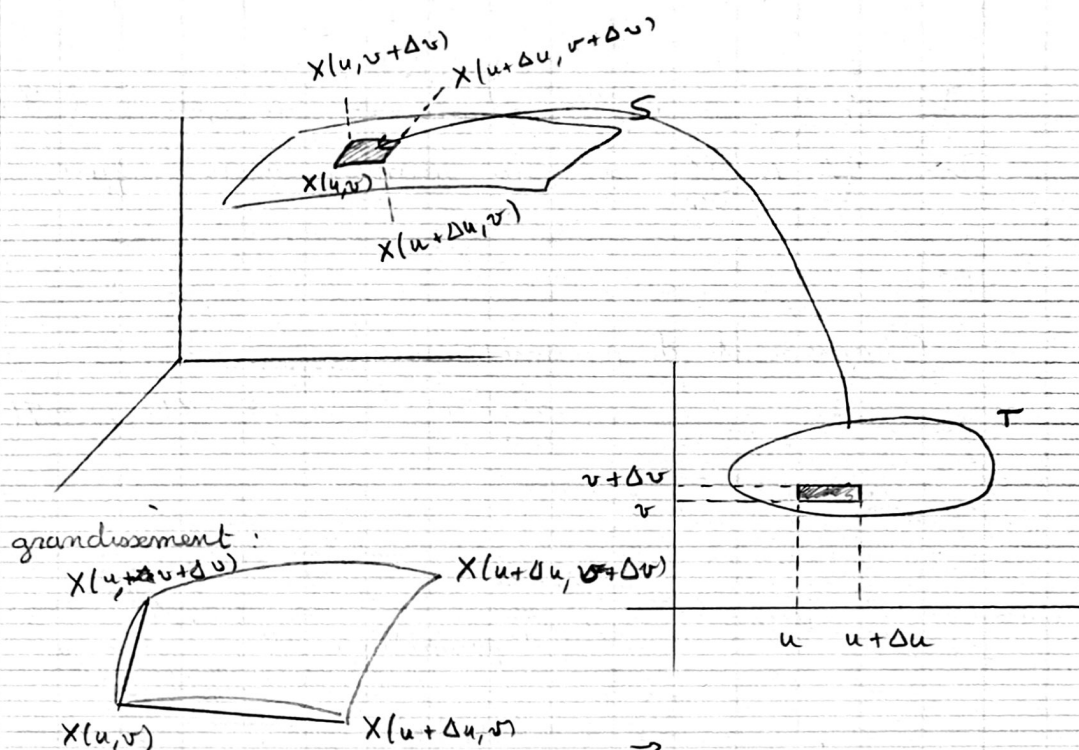


aire du parallélogramme

$$\|\vec{V}\| \|\vec{W}\| \sin \theta = \|\vec{V} \wedge \vec{W}\|$$

Def : Soit un élément de surface  $S / (u, v) \in T \rightarrow X(u, v) \in \mathbb{R}^3$  de classe  $C^1$

$$\text{aire de } S = \iint_T \left\| \frac{\partial \vec{X}}{\partial u}(u, v) \wedge \frac{\partial \vec{X}}{\partial v}(u, v) \right\| du dv$$



$$\begin{cases} X(u+\Delta u, v) - X(u, v) = \Delta u \frac{\partial \vec{X}}{\partial u}(u, v) + \Delta u \varepsilon(\Delta u) \\ X(u, v+\Delta v) - X(u, v) = \Delta v \frac{\partial \vec{X}}{\partial v}(u, v) + \Delta v \varepsilon(\Delta v) \end{cases}$$

Aire approchée:  $\left\| \frac{\partial \vec{X}}{\partial u}(u, v) \wedge \frac{\partial \vec{X}}{\partial v}(u, v) \right\| \Delta u \Delta v$   
du rectangle déformé:

$$\text{Aire approché de } S = \sum = \iint_T \left\| \frac{\partial \vec{X}}{\partial u}(u, v) \wedge \frac{\partial \vec{X}}{\partial v}(u, v) \right\| du dv$$

Exemple

$$X(x, y) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ f(x, y) \end{pmatrix}$$

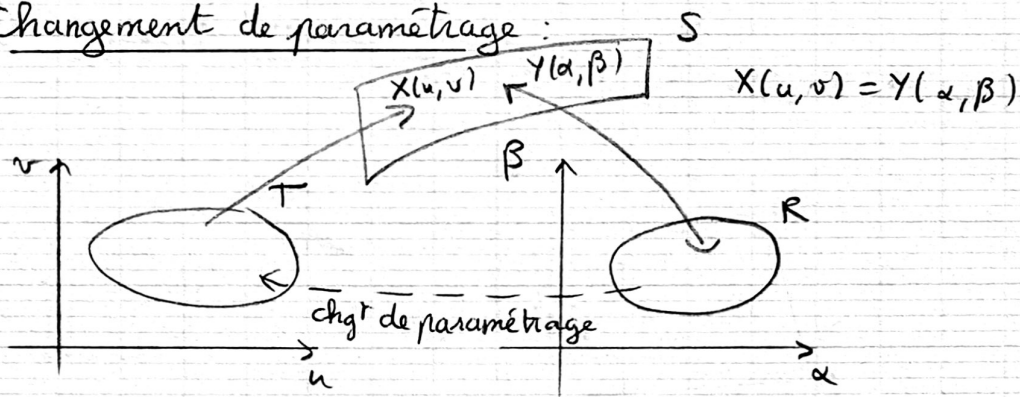
$$\frac{\partial \vec{X}}{\partial x} \wedge \frac{\partial \vec{X}}{\partial y} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ f'_x \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ f'_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -f'_x \\ -f'_y \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{aire de } S = \iint_T \sqrt{1 + (f'_x)^2 + (f'_y)^2} dx dy$$



$\frac{\partial X}{\partial u}$  et  $\frac{\partial X}{\partial v}$  = vecteurs <sup>tangents</sup> ~~orthogonaux~~ au plan à la surface.  
 Donc  $\frac{\partial X}{\partial u} \wedge \frac{\partial X}{\partial v}$  sera la normale à la surface.

Changement de paramétrage :



$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Aire } S = \iint_T \left\| \frac{\partial X}{\partial u} \wedge \frac{\partial X}{\partial v} \right\| du dv \\ \text{Aire } S = \iint_R \left\| \frac{\partial Y}{\partial \alpha} \wedge \frac{\partial Y}{\partial \beta} \right\| d\alpha d\beta \end{array} \right.$$

On a :

$$\iint_T \left\| \frac{\partial X}{\partial u}(u, v) \wedge \frac{\partial X}{\partial v}(u, v) \right\| du dv$$

$$\left. \begin{array}{l} u = u(\alpha, \beta) \\ v = v(\alpha, \beta) \end{array} \right\} \text{chgt variables}$$

$$\iint_R \left\| \frac{\partial X}{\partial u}(u(\alpha, \beta), v(\alpha, \beta)) \wedge \frac{\partial X}{\partial v}(u(\alpha, \beta), v(\alpha, \beta)) \right\| \left| \frac{D(u, v)}{D(\alpha, \beta)} \right| d\alpha d\beta \quad (1)$$

$$Y(\alpha, \beta) = X(u(\alpha, \beta), v(\alpha, \beta))$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial Y}{\partial \alpha}(\alpha, \beta) = \frac{\partial X}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial \alpha} + \frac{\partial X}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial \alpha} \\ \frac{\partial Y}{\partial \beta}(\alpha, \beta) = \frac{\partial X}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial \beta} + \frac{\partial X}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial \beta} \end{array} \right.$$



$$\frac{\partial Y}{\partial \alpha} \wedge \frac{\partial Y}{\partial \beta} = \frac{D(u,v)}{D(\alpha,\beta)} \left( \frac{\partial X}{\partial u} \wedge \frac{\partial X}{\partial v} \right)$$

bon calcul fait ! car  $\frac{D(u,v)}{D(\alpha,\beta)} = \frac{\partial u}{\partial \alpha} \cdot \frac{\partial v}{\partial \beta} - \frac{\partial u}{\partial \beta} \cdot \frac{\partial v}{\partial \alpha}$

(1) donne :  $\iint_R \left\| \frac{\partial Y}{\partial \alpha} \wedge \frac{\partial Y}{\partial \beta} \right\| \frac{1}{\left| \frac{D(u,v)}{D(\alpha,\beta)} \right|} \left| \frac{D(u,v)}{D(\alpha,\beta)} \right| d\alpha d\beta$

Notation :

$$d\sigma \doteq \left\| \frac{\partial X}{\partial u} \wedge \frac{\partial X}{\partial v} \right\| du dv$$

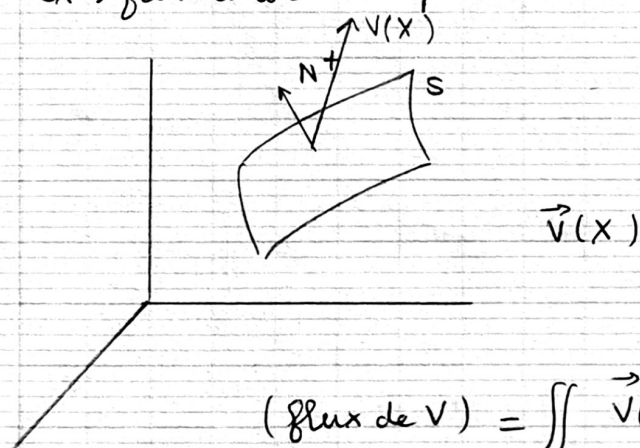
$$\text{aire } S = \iint_T d\sigma$$

$$f: S \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\iint_S f d\sigma = \iint_T f(X(u,v)) \left\| \frac{\partial X}{\partial u} \wedge \frac{\partial X}{\partial v} \right\| du dv$$

ex : flux d'un champ de vecteurs à travers un él.  $S$ , avec une normale orientée.

$N^+ =$  normale orientée unitaire



$$(\text{flux de } V) = \iint_S \vec{V}(x) \cdot \vec{N}^+(x) d\sigma$$

$$N(X(u,v)) = \frac{\frac{\partial X}{\partial u} \wedge \frac{\partial X}{\partial v}}{\left\| \frac{\partial X}{\partial u} \wedge \frac{\partial X}{\partial v} \right\|}$$

① Parmi les formes différentielles suivantes, lesquelles sont des différentielles totales ? Indiquer alors de quelle fonction.

a)  $x dy - y dx$

b)  $\frac{x dy - y dx}{xy}$

c)  $\frac{y dx - x dy}{y^2}$

② Calculer les intégrales suivantes :

a)  $\int_{\widehat{AB}} -\frac{1}{x} dx + \frac{1}{y} dy$       $A\left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 2 \end{smallmatrix}\right)$     $B\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$

b)  $\int_{\widehat{AB}} \frac{1}{y} dx - \frac{x}{y^2} dy$       $A\left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 2 \end{smallmatrix}\right)$     $B\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 4 \end{smallmatrix}\right)$

① a)  $\frac{\partial(-y)}{\partial y} = -1$     et     $\frac{\partial(x)}{\partial x} = 1$  . Ces 2 différentielles ne sont pas égales, donc la forme différentielle  $\omega = x dy - y dx$  n'est pas fermée.

On sait (Cochy-Ezra 67, p 83) que si  $\omega$  est définie sur un rectangle,  $\omega$  fermée (ie  $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$  si  $\omega = P dx + Q dy$ ) équivaut à  $\omega$  exacte (ie "totale", ie  $\exists f / \omega = df$ ).

Clf :  $x dy - y dx$  n'est pas une diff. différentielle exacte.

NB : Calcul direct possible . Supposons  $df = x dy - y dx$ .

Alors

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = -y & \Rightarrow f(x, y) = -y x + k(y) \\ \frac{\partial f}{\partial y} = x & \Rightarrow f(x, y) = x y + l(x) \end{cases}$$

donc  $k(y) = 2xy + c(y)$

Prends  $x=0$ . On obtient  $k(y) = c(0)$  donc  $k(y) = cte \quad \forall y$ , et :

$$cte = 2xy + c(x)$$

Sur  $x \neq 0$ , faisons tendre  $y$  vers  $+\infty$  : absurdité ! Donc pas de  $f$  tq  $df = \omega$ .

ie  $f$  n'est pas une forme différentielle exacte.

2

b) Soit  $\omega = P dx + Q dy$  avec  $P = -\frac{1}{x}$  et  $Q = \frac{1}{y}$ , donc  $\frac{\partial P}{\partial y} = 0 = \frac{\partial Q}{\partial x}$  et  $\omega$  sera exacte (sur tout rectangle de  $\mathbb{R}^2$ , soit ici sur  $\mathbb{R}^2 \setminus \{xy=0\}$ ).

Recherche de  $f$  tq  $df = \omega$ :

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{1}{x} & (1) \\ \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{y} & (2) \end{cases}$$

(1)  $\Rightarrow f = -\ln|x| + k(y)$  et en reportant dans (2):

$$k'(y) = \frac{1}{y} \Rightarrow k(y) = \ln|y| + c \quad (c = \text{cte})$$

Ainsi, si  $df = \omega$ , alors  $f(x, y) = -\ln|x| + \ln|y| + c = \ln \frac{|y|}{|x|} + c$

Réc., vérifions que  $\boxed{f = \ln \frac{|y|}{|x|} + c}$  satisfait  $df = \omega$ :

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy = \frac{1}{\frac{y}{x}} \left( -\frac{y}{x^2} \right) dx + \frac{1}{\frac{y}{x}} \cdot \frac{1}{x} dy = \omega$$

Q.F.D

c)  $\omega = P dx + Q dy$  avec  $P = \frac{1}{y}$  et  $Q = -\frac{x}{y^2}$ .

$$\begin{cases} \frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{1}{y^2} \\ \frac{\partial Q}{\partial x} = -\frac{1}{y^2} \end{cases} \Rightarrow \omega \text{ est exacte sur tout disque (resp. rectangle) ne rencontrant pas l'axe } y=0.$$

On aura:

$$df = \omega \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{y} & \Rightarrow f = \frac{x}{y} + k(y) & (1) \\ \frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{x}{y^2} & & (2) \end{cases}$$

En reportant (1) dans (2):

$$-\frac{x}{y^2} + k'(y) = -\frac{x}{y^2} \Rightarrow k'(y) = 0 \Rightarrow k(y) = \text{cte}$$

Donc  $\boxed{f(x, y) = \frac{x}{y} + \text{cte}}$

(2) Les 2 formes différentielles que l'on intègre sont exactes car vérifient  $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ , sur chacun des rectangles où elles sont définies. Donc :

$$I = \int_{\widehat{AB}} -\frac{1}{x} dx + \frac{1}{y} dy = \int_{\widehat{AB}} df = f(B) - f(A)$$

$$\text{où } df = -\frac{1}{x} dx + \frac{1}{y} dy.$$

$$\text{On a } f = \ln \frac{|y|}{|x|} + c \quad \text{d'après (1) b), donc}$$

$$I = f(1,1) - f(2,2) = 0$$

\* De même, d'après (1)

$$J = \int_{\widehat{AB}} \frac{1}{y} dx - \frac{x}{y^2} dy = \int_{\widehat{AB}} dg = g(B) - g(A)$$

$$\text{où } g = \frac{x}{y} + c.$$

$$J = g(0,4) - g(2,2) = -1$$

Quelques idées : Interprétation de  $\int_C \omega$

$$\omega = P dx + Q dy$$

$C$  = chemin de  $\mathbb{R}^2$  défini par  $\gamma: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ , dérivable.  
 $t \mapsto \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$

Par définition :

$$\int_C \omega = \int_C P dx + Q dy \doteq \int_{t=0}^1 \left[ P(x(t), y(t)) x'(t) + Q(x(t), y(t)) y'(t) \right] dt$$

$$= \int_0^1 \underbrace{\begin{pmatrix} P(\gamma(t)) \\ Q(\gamma(t)) \end{pmatrix}}_{\vec{\Gamma}(M(t))} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}}_{\vec{V}(t)} dt \quad (x)$$

"  $\vec{V}(t) = \text{vecteur vitesse en } M(t) \doteq \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \gamma'(t)$

valeur en  $M(t) = \gamma(t)$  du champ  
de vecteur défini par  $\omega$

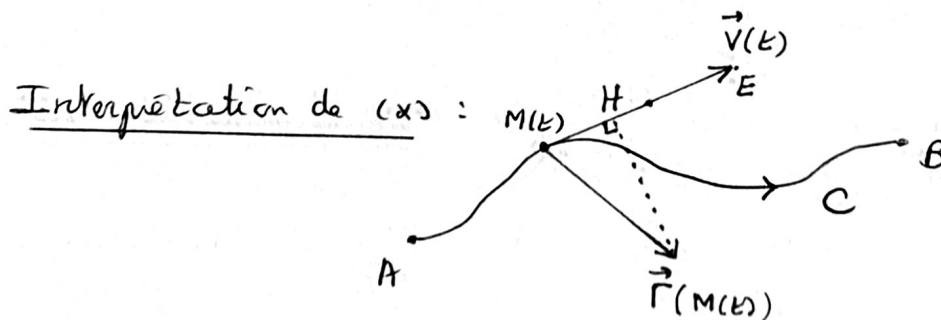
Car se donner  $\omega$  ou se donner un champ de vecteurs revient au même, vu la correspondance

1-forme différentielle

$\longleftrightarrow$  champ de vecteur

$$\omega(x, y) = P(x, y) dx + Q(x, y) dy$$

$$\longleftrightarrow \vec{\Gamma}(x, y) = \begin{pmatrix} P(x, y) \\ Q(x, y) \end{pmatrix}$$



(x) exhibe le produit scalaire  $\vec{\Gamma}(M(t)) \cdot \vec{V}(t) = \overline{M(t)H} \cdot \overline{M(t), \vec{V}(t)}$  qui



sera d'autant plus grand et positif que  $\vec{v}$  et  $\vec{F}$  sont dans la même direction, ~~et~~ d'autant plus négatif que  $\vec{v}$  et  $\vec{F}$  ne sont pas dans la même direction.

L'intégrale  $\int_C \omega$  mesure, en quelque sorte, la facilité (ou la difficulté) de circuler pour notre point  $M(t)$ , allant de A vers B en suivant C, et dans le champ de vecteurs  $\vec{F}$ .

(Pensez à  $\vec{F}$  comme à un champ de vecteurs force qui attire le mobile.)

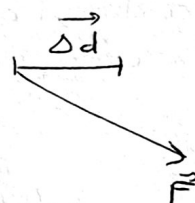
On a mesuré la circulation du champ de vecteurs  $\vec{F}$  le long de C.

(M Gouty-Ezra 67, pp 332-333)

Autre interprétation de (\*) :

$W = Pt = \text{travail}$        $P = \text{puissance}$

Puissance d'une force sur un déplacement  $\vec{\Delta d}$  :  $\vec{F} \cdot \vec{\Delta d}$



Donc :  $\Delta W = \vec{F} \cdot \vec{\Delta d} = F \cdot \frac{\Delta d}{\Delta t} \cdot \Delta t$

$$\frac{\Delta W}{\Delta t} = \vec{F} \cdot \frac{\Delta \vec{d}}{\Delta t}$$

$$\frac{dW}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v}$$

$$W = \int_a^b \vec{F} \cdot \vec{v} dt = \int_\gamma \omega \quad \text{où } \omega = \vec{F} \cdot \vec{v} \quad (\text{comme ci-dessus}).$$

|| La circulation du champ  $\vec{F}$  le long de  $\gamma$  est le travail fourni par cette force le long du chemin  $\gamma$ .

Calculer les intégrales curvilignes suivantes :

1°  $\int_C (x+y) dx + (x-y) dy$

a) Pour  $C =$  arc de cercle  $x(t) = \cos t, y(t) = \sin t, 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$

b) Pour  $C =$  segment joignant  $A(1,0), B(0,1)$

2°  $\int_C xy dx + (x+y) dy$  où  $C$  est l'arc  $\overrightarrow{AB}$  de la parabole

$y=x^2$  avec  $A(-1,1)$  et  $B(2,4)$

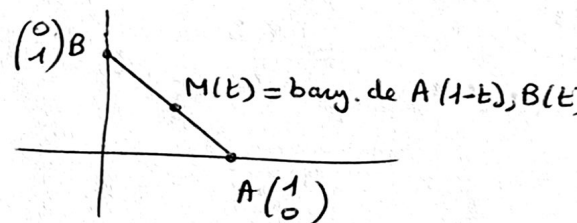
1° a) 
$$I \doteq \int_0^{\frac{\pi}{2}} ((\cos t + \sin t)(-\sin t) + (\cos t - \sin t) \cos t) dt$$
  

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2t - \sin 2t dt = \left[ \frac{\sin 2t}{2} + \frac{\cos 2t}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = -1$$

b) On paramètre le segment  $[AB]$  par  $M(t) = \begin{pmatrix} 1-t \\ t \end{pmatrix}$

$$J \doteq \int_0^1 ((1-t)+t)(-1) + ((1-t)-t) dt$$
  

$$= \int_0^1 -2t dt = \left[ -t^2 \right]_0^1 = -1$$



Autre méthode :

Posons  $\omega = (x+y) dx + (x-y) dy$ . Est-ce une forme différentielle exacte ?

Cherchons  $f$  tq  $\omega = df$ , ie

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = x+y & (1) \\ \frac{\partial f}{\partial y} = x-y & (2) \end{cases}$$

(1)  $\Leftrightarrow f = \frac{x^2}{2} + yx + k(y)$  et en reportant dans (2) :

$x + k'(y) = x - y \Rightarrow k'(y) = -y \Rightarrow k(y) = -\frac{y^2}{2} + c \quad c \in \mathbb{R}$

$\omega$  est exacte, et  $f(x,y) = \frac{x^2-y^2}{2} + xy + c$ .

$$\text{Donc } \int_{\overline{AB}} \omega = \int_{\overline{AB}} df = f(B) - f(A) = f(0,1) - f(1,0) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = -1$$

pour tous les chemins d'extrémités A et B allant de A vers B !

2°/

$$\begin{cases} x=t \\ y=t^2 \end{cases}$$

$$I = \int_{t=-1}^2 [t^3 + (t+t^2)2t] dt$$

$$= \int_{-1}^2 (3t^3 + 2t^2) dt$$

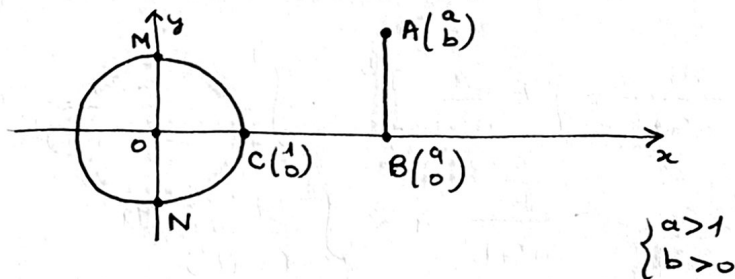
$$= \left[ \frac{3}{4}t^4 + \frac{2}{3}t^3 \right]_{-1}^2$$

$$= \frac{69}{4}$$

Calculer l'intégrale curviligne :

$$I = \int_{\Gamma} \frac{1}{(x^2+y^2)^2} \left( (x \ln(x^2+y^2) - x^2 y) dx + (y \ln(x^2+y^2) + x^3) dy \right)$$

le long du contour CMNCBA ci-dessous :



(réf. E.S.T.P et Serfati III. 6.3)

\* Sur le cercle :  $C \begin{cases} x(t) = \cos t \\ y(t) = \sin t \end{cases}$

$$I_1 = \int_C -\cos^2 t \sin t (-\sin t) + \cos^3 t \cos t dt = \int_0^{2\pi} \cos^2 t dt = \pi$$

\* Sur CB :  $\begin{cases} x(t) = t \in [1, a] \\ y(t) = 0 \end{cases}$

$$I_2 = \int_1^a \frac{t \ln t^2}{t^4} dt = 2 \int_1^a \frac{\ln t}{t^3} dt = 2 \left( \left[ \ln t \cdot \frac{t^{-2}}{-2} \right]_1^a - \int_1^a \frac{1}{t} \cdot \frac{t^{-2}}{-2} dt \right)$$

après calculs :  $I_2 = -\frac{\ln a}{a^2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2a^2}$

\* Sur BA :  $\begin{cases} x(t) = a \\ y(t) = t \in [0, b] \end{cases}$

$$I_3 = \int_0^b \frac{t \ln(a^2+t^2) + a^3}{(a^2+t^2)^2} dt = \underbrace{\int_0^b \frac{t \ln(a^2+t^2)}{(a^2+t^2)^2} dt}_{J_1} + a^3 \underbrace{\int_0^b \frac{1}{(a^2+t^2)^2} dt}_{J_2}$$

Calcul de  $J_1$  : Intégration par parties,

$$J_1 = \left[ -\frac{1}{2(a^2+t^2)} \ln(a^2+t^2) \right]_0^b - \int_0^b -\frac{1}{2(a^2+t^2)} \cdot \frac{2t}{a^2+t^2} dt$$

$$= \frac{\ln a^2}{2a^2} - \frac{\ln(a^2+b^2)}{2(a^2+b^2)} + \underbrace{\int_0^b \frac{t}{(a^2+t^2)^2} dt}_{J_2}$$

$$\left[ -\frac{1}{2} \frac{1}{a^2+t^2} \right]_0^b = -\frac{1}{2(a^2+b^2)} + \frac{1}{2a^2}$$



$$\text{d'où } J_1 = \frac{\ln a}{a^2} - \frac{\ln(a^2+b^2)}{2(a^2+b^2)} + \frac{1}{2a^2} - \frac{1}{2(a^2+b^2)}$$

Calcul de  $J_2$  :

$$\begin{aligned} \text{Par int. par parties : } \int_0^b \frac{dt}{a^2+t^2} &= \left[ t \cdot \frac{1}{a^2+t^2} \right]_0^b - \int_0^b t \cdot \frac{-2t}{(a^2+t^2)^2} dt \\ &= \frac{b}{a^2+b^2} + 2 \int_0^b \frac{t^2}{(a^2+t^2)^2} dt \\ &= \int_0^b \frac{1}{a^2+t^2} dt - a^2 \int_0^b \frac{1}{(a^2+t^2)^2} dt \end{aligned}$$

$$\text{d'où } \int_0^b \frac{dt}{a^2+t^2} = \frac{b}{a^2+b^2} + 2 \int_0^b \frac{dt}{a^2+t^2} - 2a^2 \int_0^b \frac{dt}{(a^2+t^2)^2}$$

$$\begin{aligned} J_2 &= \int_0^b \frac{dt}{(a^2+t^2)^2} = \frac{1}{2a^2} \left( \int_0^b \frac{dt}{a^2+t^2} + \frac{b}{a^2+b^2} \right) = \frac{1}{2a^3} \operatorname{Arctg} \frac{b}{a} + \frac{b}{2a^2(a^2+b^2)} \\ &\quad \left[ \frac{1}{a} \operatorname{Arctg} \frac{t}{a} \right]_0^b = \frac{1}{a} \operatorname{Arctg} \frac{b}{a} \end{aligned}$$

En remplaçant, on obtient  $J_3$  :

$$J_3 = J_1 + a^3 J_2 = \frac{\ln a}{a^2} - \frac{\ln(a^2+b^2)}{2(a^2+b^2)} + \frac{1}{2a^2} - \frac{1}{2(a^2+b^2)} + \frac{1}{2} \operatorname{Arctg} \frac{b}{a} + \frac{ab}{2(a^2+b^2)}$$

Ccl :

$$I = J_1 + J_2 + J_3 = \pi + \frac{1}{2} - \frac{\ln(a^2+b^2)}{2(a^2+b^2)} - \frac{1}{2(a^2+b^2)} + \frac{ab}{2(a^2+b^2)} + \frac{1}{2} \operatorname{Arctg} \frac{b}{a}$$

NB : On aurait pu passer en polaire - c'est fait sur Serfati III.6.3.

Posez  $\omega_1 = x \ln(x^2+y^2) dx + y \ln(x^2+y^2) dy$ . Soit  $P: \begin{pmatrix} r \\ \theta \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos \theta \\ r \sin \theta \end{pmatrix}$  le chgt de coord. en polaire, on a :

$$\int_{\Gamma} \omega_1 = \int_{\Gamma_1 = P^{-1}(\Gamma)} P^* \omega_1 \quad \text{où } P^* \omega_1 \text{ est le pull-back de } \omega_1.$$

On obtient  $P^* \omega_1$  en remplaçant  $x$  et  $y$  par  $r \cos \theta$  et  $r \sin \theta$  dans  $\omega_1$  :

$$\begin{aligned} P_1^* \omega_1(r, \theta) &= r \cos \theta \ln r^2 \underbrace{d(r \cos \theta)}_{\cos \theta dr - r \sin \theta d\theta} + r \sin \theta \ln r^2 \underbrace{d(r \sin \theta)}_{\sin \theta dr + r \cos \theta d\theta} \\ &= \dots = 2r \ln r^2 dr \quad \text{et ainsi de suite} \dots \end{aligned}$$